DM 3

ex 1

1. on note $\{e_1, e_2\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$, avec $e_1 = (1,0)$, $e_2 = (0,1)$

on note $\{f_1, f_2, f_3\}$ ——— $\mathbb{R}^3$, avec $f_1 = (1,0,0)$, $f_2 = (0,1,0)$
$f_3 = (0,0,1)$

donc $F(e_1) = F(1,0) = (-1, 2, \lambda) = -f_1 + 2f_2 + \lambda f_3$

$F(e_2) = F(0,1) = (2, -4, (\lambda+3)) = 2f_1 - 4f_2 + (\lambda+3) f_3$

$\Rightarrow$ $F(e_1, e_2) = (f_1, f_2, f_3)M$, avec M la matrice de F dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$

M est donc donnée par

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \\ \lambda & (\lambda+3) \end{pmatrix}$$

2. M est ligne équivalente à

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 3\lambda+3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & \lambda+1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donc l'application F est de rang $= \begin{cases} 2 & \text{si } \lambda \neq -1 \\ 1 & \text{si } \lambda = -1 \end{cases}$

3. Si $\lambda = -1$, $\operatorname{Im}(F) = \langle (-1, 2, -1), (2, -4, 2) \rangle$
$= \langle (-1, 2, -1) \rangle$

$\ker(F) = \{(x,y) \,/\, F(x,y) = 0\} = \{(x,y) \,/\, -x + 2y = 0\}$
$= \langle (1, \frac{1}{2}) \rangle$

ex 2.

1. notons $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$

alors $F(e_1, e_2, e_3) = (e_1, e_2, e_3) \begin{pmatrix} -1 & -6 & 6 \\ 0 & 5 & -6 \\ 0 & 3 & -4 \end{pmatrix}$

posons $A := \begin{pmatrix} -1 & -6 & 6 \\ 0 & 5 & -6 \\ 0 & 3 & -4 \end{pmatrix}$, on a alors

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 6 & -6 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 6 & -6 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donc $\operatorname{rang}(A) = 3$ (on a également $\operatorname{rang}(F) = 3$)

2. a) il suffit de montrer la famille $\{v_1, v_2, v_3\}$ est libre.

- c-à-d, le système linéaire

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = 0$$

a une seule solution $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$

ceci résulte d'un calcul direct.

b) $\mathcal{B} \to \mathcal{B}'$

$$(v_1, v_2, v_3) = (e_1, e_2, e_3) \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (*)$$

$\mathcal{B}' \to \mathcal{B}$ à partir de $(*)$, on obtient

$$(v_1, v_2, v_3) \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = (e_1, e_2, e_3)$$

et avec un calcul direct, on a

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

donc $(e_1, e_2, e_3) = (v_1, v_2, v_3) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

c). $F(v_1) = \big(-3 - 6\cdot(-2) + 6\cdot(-2),\ 5\cdot(-2) - 6\cdot(-2),\ 3\cdot(-2) - 4\cdot(-2) \big)$

$= (-3, 2, 2) = -v_1$

$F(v_2) = -v_2.$

$F(v_3) = +2 v_3$

on a donc $F(v_1, v_2, v_3) = (v_1, v_2, v_3) \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

c-à-d: la matrice de F dans $\{v_1, v_2, v_3\}$ est $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

<u>ex 3</u>. notons $e_0 = 1$, $e_1 = X$, $e_2 = X^2$, $e_3 = X^3$

alors $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$ est la base canonique de E

1). f est une application linéaire (vérification directe).

$f(e_0) = (X-a)\cdot(1)' = 0$

$f(e_1) = (X-a)\cdot(X)' = X - a = e_1 - a e_0$

$f(e_2) = (X-a)\cdot(X^2)' = 2X^2 - 2aX = 2e_2 - 2a e_1$

$f(e_3) = (X-a)(X^3)' = 3X^3 - 3aX^2 = 3e_3 - 3a e_2$.

donc $f(e_0, e_1, e_2, e_3) = (e_0, e_1, e_2, e_3) \cdot \begin{pmatrix} 0 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2a & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -3a \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

2.) Soit $p \in \mathbb{R}[x]$ un polynôme de degré ≤ 3 (c-a-d: $P \in E$)

alors $f(p) = 0$

$\Leftrightarrow (x-a) \cdot p'(x) = 0$

$\Leftrightarrow p'(x) = 0$.

$\Leftrightarrow$ p est le polynôme constant.

donc $\ker(f) = \{ \text{polynôme constant} \} \cong \mathbb{R}$

3) par définition $f(p) = (x-a) \cdot p'(x)$.

en particulier $f(p)(a) = 0$

donc $f(p) \in \{ Q \in E \mid Q(a) = 0 \} =: F$

d'où $\mathrm{Im}(f) \subset F$

réciproquement, Soit $Q \in F$, alors $Q(a) = 0$

donc $(X-a) \mid Q(x)$

donc $\exists$ polynôme $Q_1 \in \mathbb{R}[x]$ t.q

$Q(x) = (x-a) \cdot Q_1(x)$

Or $Q \in F \subset E$, en particulier, Q est de degré ≤ 3

$\Rightarrow \deg(Q_1(x)) \leq 2$

Soit $P(x)$ une primitive de $Q_1(x)$, alors $P(x)$ est un polynôme de degré ≤ 3 t.q. $P'(x) = Q_1(x)$

d'où $f(p) = (x-a) \cdot p'(x) = (x-a) \cdot Q_1(x) = Q(x)$

autrement-dit, $Q \in \mathrm{Im}(f)$

donc $F \subset \mathrm{Im}(f)$

finalement, on a $F = \mathrm{Im}(f)$ #

4) Il suffit de montrer

$$\langle 1, (X-a), (X-a)^2, (X-a)^3 \rangle = E$$

puisque

$$X^n = (X-a+a)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (X-a)^i \cdot a^{n-i},$$ on en déduit:

$$1 = 1$$
$$X = (X-a) + a\cdot 1$$
$$X^2 = (X-a)^2 + 2a\cdot(X-a) + a^2\cdot 1$$
$$X^3 = (X-a)^3 + 3a(X-a)^2 + 3a^2(X-a) + a^3\cdot 1.$$

donc $\{1, X, X^2, X^3\} \subset \langle 1, (X-a), (X-a)^2, (X-a)^3 \rangle$

d'où $E = \langle 1, X, X^2, X^3 \rangle \subset \langle 1, (X-a), (X-a)^2, (X-a)^3 \rangle \subset E$

donc $\langle 1, (X-a), (X-a)^2, (1-a)^3 \rangle = E$

c-a-d: la famille $\{1, (X-a), (X-a)^2, (X-a)^3\}$ est aussi une base de E

5) $\mathcal{B} \to \mathcal{B}'$

$$(1, (X-a), (X-a)^2, (X-a)^3) = (1, X, X^2, X^3) \begin{pmatrix} 1 & -a & a^2 & -a^3 \\ 0 & 1 & -2a & 3a^2 \\ 0 & 0 & 1 & -3a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\mathcal{B}' \to \mathcal{B}$

$$(1, X, X^2, X^3) = (1, (X-a), (X-a)^2, (X-a)^3) \cdot \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & 1 & 2a & 3a^2 \\ 0 & 0 & 1 & 3a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

6) Comme $f((X-a)^n) = (X-a)\cdot((X-a)^n)'$

$$= (n-1)\cdot(X-a)\cdot(X-a)^{n-1}$$
$$= (n-1)\cdot(X-a)^n \qquad (\text{pour } n \geq 1)$$

donc

$$f(1, (X-a), (X-a)^2, (X-a)^3) = (1, (X-a), (X-a)^2, (X-a)^3) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

ex4

I)

1) vérification directe

2) $\ker(p_1) = \{u \in E \,/\, u_1 = 0\}$

$= \{u \in E \,/\, u = u_2 \in F_2\} = F_2.$

$\mathrm{Im}(p_1) = \{p_1(u) \,/\, u \in E\}$

$= \{u_1 \,/\, u = u_1 + u_2 \in F_1 \oplus F_2 = E\}$

$= F_1$

$\ker(p_2) = F_1$

$\mathrm{Im}(p_2) = F_2$

3) $p_1 \circ p_1 = p_1$

$p_2 \circ p_2 = p_2$

$p_1 \circ p_2 = p_2 \circ p_1 = 0$

$p_1 + p_2 = id_E$

II.

par déf, $p : E \to E$ linéaire t.q $p \circ p = p$

4) mq $\ker(p) \cap \mathrm{Im}(p) = \{0\}$

Soit $x \in \ker(p) \cap \mathrm{Im}(p)$

alors $\exists\ y \in E$ t.q $p(y) = x$

$\Rightarrow\ p \circ p(y) = p(x) = 0$ (car $x \in \ker(p)$!)

or $p \circ p = p \Rightarrow p(y) = p(p(y)) = 0$

d'où $x = p(y) = 0.$

donc $\ker(p) \cap \mathrm{Im}(p) = \{0\}$

5) <u>mq</u> $Im(p) \oplus ker(p) = E$

on va montrer d'abord que $Im(p) + ker(p) = E$.

clairement, on a $Im(p) + ker(p) \subset E$

réciproquement, soit $x \in E$.

alors $p(p(x)) = p(x)$

$\Rightarrow p(p(x) - x) = 0$

notons $x_1 = p(x)$. $x_2 = x - p(x)$

<u>alors</u> $x_1 \in Im(p)$ $x_2 \in ker(p)$

et on a $x = x_1 + x_2$

d'où $x \in ker(p) + Im(p)$

donc $E = Im(p) + ker(p)$.

or en vertu de question 4), on sait $Im(p) \cap ker(p) = \{0\}$

Ceci implique donc $E = Im(p) \oplus ker(p)$

6). notons $A_1 = Im(p)$. $A_2 = ker(p)$

question 5) $\Rightarrow E = A_1 \oplus A_2$

on définit alors
$$p_1 : E \longrightarrow E, \quad x \longmapsto x_1$$
$$p_2 : E \longrightarrow E, \quad x \longmapsto x_2$$

avec $x = x_1 + x_2$, et $x_i \in A_i$

on vérifie facilement qu'on a $p_1 = p$: en effet. $\forall x \in E$

d'après 5), on a $x = p(x) + (x - p(x)) = x_1 + x_2$

<u>donc</u> $p_1(x) = x_1 = p(x)$

#

III

7) vérification directe

8) $\forall f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application

posons $f_1(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2}$ $\qquad f_2(x) = \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}$

alors $f_1(-x) = f_1(x)$. $\qquad f_2(-x) = -f_2(x)$

donc $f_i \in F_i$

De plus $f(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2} + \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}$

$= f_1(x) + f_2(x)$

d'où $E \subset F_1 + F_2 \subset E$

donc $F_1 + F_2 = E$

D'autre part. soit $f \in F_1 \cap F_2$

alors f est à la fois paire et impaire

donc $\begin{cases} f(x) = f(-x) \\ f(-x) = -f(x) \end{cases} \Rightarrow f(x) = -f(x)$

$\Rightarrow 2f(x) = 0$

$\Rightarrow f(x) = 0$

C'est-à-dire: $f = 0$

d'où $E = F_1 \oplus F_2$

(9) $p_1(f) = \displaystyle\sum_{\substack{i=0 \\ i \text{ est pair}}}^{n} a_i x^i = \begin{cases} a_0 + a_2 x^2 + a_4 x^4 + \dots + a_n x^n & \text{si } n \text{ pair} \\ a_0 + a_2 x^2 + a_4 x^4 + \dots + a_{n-1} x^{n-1} & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$

$p_2(f) = \displaystyle\sum_{\substack{i=0 \\ i \text{ impair}}}^{n} a_i x^i = \begin{cases} a_1 x + a_3 x^3 + \dots + a_{n-1} x^{n-1} & \text{si } n \text{ pair} \\ a_1 x + a_3 x^3 + \dots + a_n x^n & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$